

CAPÍTULO 13

Análisis de procesos de líneas de espera: problemas de líneas de espera

INTRODUCCIÓN

En diferentes ocasiones en la vida, la mayoría de las personas que viven en la sociedad moderna han esperado en una fila para recibir algún tipo de servicio. Esperar podría incluir (pero en difinitiva no se limitaría a) situaciones como

esperar en fila para pagar las compras en la caja de una tienda de abarrotes

esperar en fila en una estación de gasolina para adquirir combustible

esperar ser atendido cuando uno llama por teléfono a la compañía de electricidad para hacer aclaraciones con respecto a la factura

esperar que el cajero de un banco lleve a cabo alguna transacción financiera

esperar en fila para comprar boletos para algún evento importante, deportivo o de entretenimiento.

Esta lista podría ampliarse en forma indefinida y, aún así, no agotar todas las posibles situaciones en las que las personas esperan en una fila, o **"cola"**, *para ser atendidas. Pero las líneas de espera implican algo más que personas. Aunque es probable que no hayamos considerado esas colas, cuando una máquina se descompone y requiere mantenimiento, también debe esperar en una cola para que la atienda el personal de servicio. Por ello, puede decirse que una línea de espera, o cola, se forma cuando alguna unidad (persona, máquina, etc.) requiere servicio y éste no se proporciona en forma instantánea.*

Dado que las líneas de espera son tan frecuentes en la sociedad moderna, no resulta sorprendente que se haya desarrollado un campo del conocimiento a partir de su estudio, dicho campo, que comúnmente se denomina teoría de líneas de espera *lo inició un ingeniero danés de teléfonos, A. K. Erlang, quien en 1910 realizó los primeros trabajos sobre*

problemas de filas. Erlang estaba interesado en los problemas que tenían las personas que llamaban a un conmutador telefónico.

sistema de líneas de espera

En este capítulo hablaremos con frecuencia de un ***sistema de líneas de espera.*** *Con esto, haremos referencia a todos los componentes que conforman un arreglo de líneas de espera: unidades que solicitan servicio, la línea de espera propiamente dicha, las instalaciones de servicio y las unidades que se retiran después de recibir servicio.*

A diferencia de un modelo simple como el de la programación lineal, la teoría de líneas de espera (o de colas) abarca un grupo muy grande de modelos, en donde cada uno se refiere a un tipo diferente de situación de línea de espera. Sin embargo, todos estos modelos tienen algunas cosas en común. En primer lugar, no pretenden "resolver" problemas de líneas de espera; más bien, describen el sistema de líneas de espera al calcular las características de operación *de la línea. Éstas incluyen elementos como el número promedio de unidades que esperan el servicio y el tiempo promedio que una unidad espera para ser atendida. Para calcular las características operativas, el usuario debe especificar ciertos* parámetros *del sistema de líneas de espera, tales como la forma en que las unidades llegan para ser atendidas y la forma en que se maneja el servicio real. El objetivo de los modelos de líneas de espera es más de descripción que de optimización, y cualquier optimización que tenga lugar debe llevarla a cabo el usuario variando los parámetros del sistema para obtener diferentes conjuntos de características de operación. El conjunto de características de operación que se ajusta en forma más estrecha a las necesidades del usuario define la "mejor" estructura del sistema. Por esta razón, es común que los modelos de líneas de espera sean* descriptivos *más que* normativos.

Dado que muchos de los parámetros de los modelos de líneas de espera no se conocen con certidumbre, estos modelos son más bien estocásticos *que* determinísticos. *Los parámetros como tasas de llegada y tasas de servicio se describen a través de distribuciones de probabilidad; por ello, en el modelo se utilizan valores esperados o promedio. Al mismo tiempo, los modelos de líneas de espera son* estáticos *y* no lineales *en vez de dinámicos y lineales, debido a que se supone que los parámetros no varían con el tiempo, tal como se verá más adelante, y que los cambios en las características de operación no son proporcionales a los cambios en los parámetros del modelo.*

CASO
Guarantee Bank and Trust Company, Inc.

El Sr. James T. Smith del Guarantee Bank and Trust Company es el nuevo vicepresidente auxiliar de servicio a clientes en el banco. Su primera tarea es investigar un nuevo plan para reducir el tiempo de espera de los clientes al ser atendidos en las cajas para automovilistas. Por lo general, al elegir una caja para automovilistas el cliente selecciona la fila más corta. Pero este procedimiento no siempre funciona bien porque, debido a diferencias en los tiempos de las transacciones, algunas filas tienden a moverse con mayor rapidez que otras. Entonces, sucede con frecuencia que un cliente que elige una línea corta debe esperar un periodo desproporcionado de tiempo si los clientes que están antes que él tienen transacciones prolongadas.

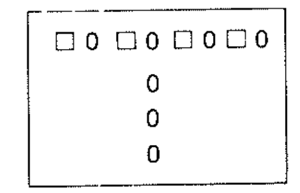
El señor Smith ha investigado diversas formas en las que otros bancos manejan ese problema. Se dio cuenta que un método popular implica hacer que todos los clientes que llegan en automóvil esperen en una sola fila. Después, cada cliente pasa al primer cajero que queda disponible cuando su automóvil llega al primer lugar de la fila. Al comparar el procedimiento actual con el que se propone, el criterio para decidir si debe implantar la operación con una sola

Cajeros de atención a automovilistas

Clientes que se encuentran en sus automóviles esperando ser atendidos

(a) plan actual

Cajeros de atención a automovilistas



Clientes que se encuentran en sus automóviles esperando ser atendidos

(b) plan propuesto

FIGURA 13-1. Planes actual y propuesto

fila será el tiempo promedio que un cliente espera en la fila. Si se encuentra que el nuevo método de fila única produce un tiempo promedio de espera menor, entonces se adoptará sin investigar ninguno de los otros procedimientos. Ambos procedimientos se ilustran en la figura 13-1.

En la figura 13-1a, se observa que los clientes automovilistas esperan ser atendidos en cuatro filas individuales, en tanto que en la figura 13-1b, los clientes esperan en una sola fila para que quede disponible alguno de los cuatro cajeros.

Un estudio previo de este problema, realizado por el señor Smith, muestra que los clientes llegan a una tasa promedio de 16 por hora y que cada cajero maneja transacciones a una tasa promedio de 8 por hora.

Para analizar el caso, es necesario determinar las características de operación de cada uno de los sistemas de líneas de espera. Dado que se ha llevado a cabo una gran cantidad de investigaciones sobre los modelos de líneas de espera, un punto razonable de inicio para el análisis sería determinar si cualquiera de los planes se ajusta a alguno de los modelos disponibles. Si es así, entonces simplemente podría aplicarse el modelo conocido a la situación que se enfrenta y calcular las características operativas que se desean para el sistema.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE LÍNEAS DE ESPERA (COLAS)

Con el objeto de verificar si una situación determinada del sistema de líneas de espera se ajusta o no a un modelo conocido, se requiere un método para clasificar las líneas de espera. Esa clasificación debe responder preguntas como las siguientes:

1. ¿El sistema de líneas de espera tiene un solo punto de servicio o existen puntos múltiples de servicio en secuencia?
2. ¿Existe sólo una instalación de servicio o son múltiples las instalaciones de servicio que pueden atender a una unidad?
3. ¿Las unidades que requieren servicio llegan siguiendo algún patrón o llegan en forma aleatoria?
4. ¿El tiempo que se requiere para el servicio se da en algún patrón o asume duraciones aleatorias de tiempo?

Número de etapas y de canales de servicio

Para responder las preguntas 1 y 2, en primer lugar, debe decidirse si una unidad ha de pasar a través de un solo punto de servicio o a través de varios. Si se trata del primer caso, entonces se tiene sólo una *entrada* al punto de servicio y una *salida* del punto de servicio. Esto se denomina sistema de *etapa única.* Si la salida del primer punto de servicio se convierte en la entrada a un segundo punto de servicio, y así sucesivamente, se tiene un sistema de líneas de espera de *etapas múltiples,* que es mucho más complejo y difícil de analizar que los sistemas de etapa única. Por esta razón, consideraremos sólo los sistemas de este último tipo.

En la figura 13-2 se muestran en un diagrama ambas estructuras de sistema de líneas de espera. Observe que en el sistema de etapas múltiples la salida de la primera etapa es la entrada para la segunda, y así sucesivamente para todas las etapas.

Si nos restringimos a los sistemas de etapa única, entonces nos ocuparemos en forma exclusiva del número y disposición de las líneas de espera en una sola etapa. En la figura 13-3 se muestran tres casos importantes de este tipo de sistemas. El primer caso (a) es una instalación de servicio único, o **canal**, como con frecuencia se denomina, con una sola línea de espera. El segundo caso (b) tiene instalaciones de servicio o canales múltiples y también líneas de espera múltiples. Éstas son en esencia las simples en paralelo y pueden analizarse como tales. Este es el sistema que se presenta en el banco. El tercer caso (c) es una sola línea de espera atendida por instalaciones de servicio múltiple. Esta es la disposición que se propone para el banco. En ambos casos (b y c), se supone en general que todas las instalaciones de servicio tienen una eficiencia equivalente.

canal

Notación de Kendall

Por lo general, las tasas de llegada y de servicio no se conocen con certidumbre sino que son de naturaleza estocástica o probabilística. Es decir, los tiempos de llegada y de servicio deben describirse a través de distribuciones de probabilidad, y las distribuciones de probabilidad que se elijan deben describir la forma en que se comportan los tiempos de llegada o de servicio.

En teoría de líneas de espera o de colas se utilizan tres distribuciones de probabilidad bastante comunes:

1. de Markov
2. determinística
3. general

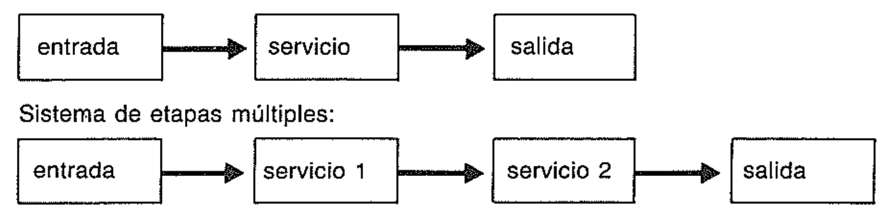


FIGURA 13-2. Sistemas de etapa única y de etapas múltiples

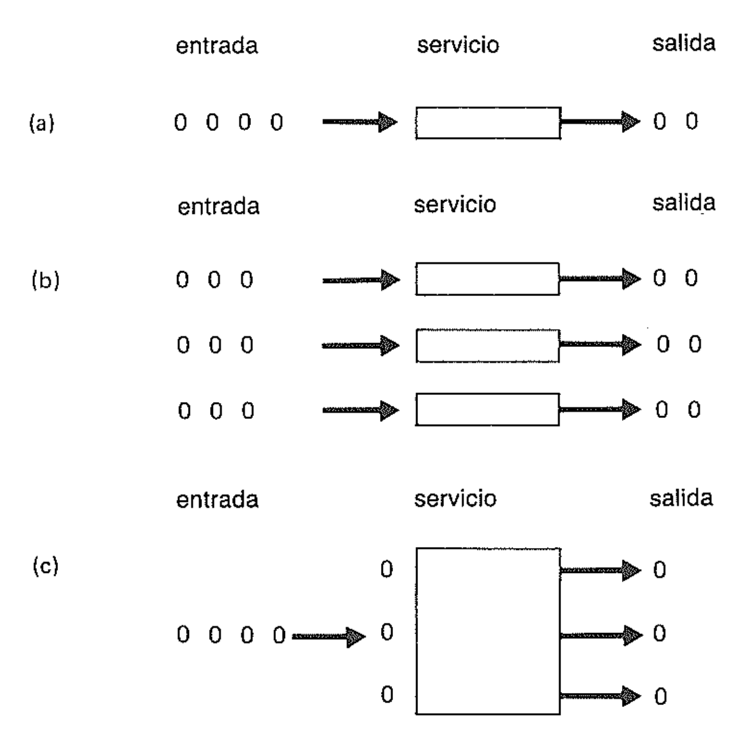


FIGURA 13-3. Ejemplos de sistemas de etapa única

Una distribución de *Markov* (en honor de A. A. Markov, matemático que identificó los eventos "sin memoria") se utiliza para describir ocurrencias aleatorias, es decir, aquellas de las que puede decirse carecen de memoria acerca de eventos pasados. Una distribución *determinística* es aquella en la que los sucesos ocurren en forma constante y sin cambios. Por último, una distribución *general* sería cualquier otra distribución de probabilidad. Es posible describir el patrón de llegadas por medio de una distribución de probabilidad y el patrón de servicio a través de otra.

notación Kendall

Para permitir a los investigadores y estudiantes de la teoría de líneas de espera comunicarse entre sí con facilidad acerca de diversos sistemas de líneas de espera, Kendall, matemático británico, elaboró una notación abreviada para describir en forma sucinta los parámetros de un sistema de este tipo. En la **notación de Kendall** un sistema de líneas de espera se designa como

$$A/B/C$$

en donde A se sustituye por una letra que denote la distribución de llegada
B se sustituye por una letra que denote la distribución de servicio
C se sustituye por un entero positivo que denote el número de canales de servicio.

La notación de Kendall utiliza también M = Markoviano, D = determinística y G = general. Por ejemplo, un sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, servicio determinístico y 3 canales de servicio se identificaría en notación Kendall como

M/D/3

En todos los casos, se supone que existe sólo una línea de entrada.

Otras consideraciones

Es evidente que existen otros atributos aparte de los que se analizaron antes y que deben tomarse en consideración cuando se analiza un sistema de líneas de espera. Estos incluyen

- el tamaño de la población de la que provienen los elementos que ingresan al sistema de líneas de espera (la "población que llega")
- la forma en que las unidades llegan para ingresar al sistema de líneas de espera; por ejemplo, una por una o en grupos
- la disciplina de la línea de espera, o el orden en que se atienden las unidades (¿se atienden las unidades en el orden en que llegan, es decir, el primero en llegar es el primero que se atiende, o existe algún otro sistema de prioridad para el servicio?)
- si las unidades *rechazan* o no debido a la longitud de la línea de espera y no ingresan al sistema
- si las unidades se arrepienten y *abandonan* el sistema después de haber aguardado un tiempo en la fila
- si existe o no espacio suficiente para que todas las unidades que llegan aguarden en la fila

Las diversas respuestas a preguntas de este tipo, junto con las diferentes disposiciones de probabilidad y los diferentes números de canales de servicio, sirven para generar una gran variedad de tipos de sistemas de líneas de espera que deben analizarse. En este análisis introductorio de las líneas de espera, nos restringiremos a los casos más simples; en particular supondremos:

- una población infinita que llega
- las llegadas son en forma individual
- las unidades que llegan se atienden en el orden en que llegan
- las llegadas no se rechazan ni abandonan por la longitud de la línea de espera
- siempre hay suficiente espacio para que se forme la línea de espera

ANÁLISIS DEL CASO DEL GUARANTEE BANK AND TRUST COMPANY

Volviendo al problema del Guarantee Bank, es necesario clasificar el sistema actual de líneas de espera y el que se propone, para determinar si es posible describirlos a través de algunos de los modelos conocidos. Si existe un modelo, entonces pueden calcularse las características de operación de cada uno de los sistemas y compararlas con el criterio del señor Smith, el tiempo promedio de espera por cliente, para determinar cuál es el mejor sistema.

Comparación de los sistemas actual y propuesto

Los dos sistemas son similares en varios sentidos. En primer lugar, en definitiva se trata de sistemas de una sola etapa. En segundo lugar, comparten la misma población que llega y el patrón de llegadas es el mismo para ambos. Por último, el patrón de servicios será también el mismo, es decir, los cajeros atienden a todos los clientes de la misma manera.

También es necesario considerar los otros aspectos, es decir, el tamaño de la población, la llegada de las personas, el patrón de servicio y las personas que rechazan o abandonan el sistema. Para la situación de los cajeros para automovilistas del Guarantee Bank and Trust Company, puede suponerse que la población de clientes es tan grande que para todo propósito práctico puede considerarse infinita. Dado que los clientes llegan en automóviles, por lo general lo hacen de manera individual. También, y dado que los clientes se encuentran en automóviles, se les atiende sobre la base de que al primero que llega se le atiende primero y no pueden abandonar la fila una vez que se encuentran formados. Aunque podrían arrepentirse, lo que provocaría rechazo, este no es el caso común, puesto que la mayoría de las personas necesitan realizar sus transacciones y por lo general esperan para hacerlo.

La principal diferencia entre los dos sistemas radica en la disposición de las instalaciones de servicio. Consultando la figura 13-3, el sistema actual está constituido por cuatro filas en paralelo (fig. 13-3b) en tanto que el sistema que se propone está formado por una sola línea de espera con cuatro centros de servicio (fig. 13-3c). El sistema actual puede clasificarse como si fueran cuatro sistemas de filas de canal único, separados pero idénticos, y el sistema propuesto puede considerarse como un solo sistema con centros múltiples de servicio. El sistema actual funciona como cuatro filas paralelas puesto que una vez que un automóvil ha ingresado a la línea de espera no es fácil que se cambie a otra.

Patrones de llegada y de servicio

Examinemos ahora los patrones de llegada y de servicio. Parece lógico suponer que la llegada de los clientes será aleatoria puesto que la mayoría de los que llegan a realizar sus transacciones por lo general no tienen ninguna relación con los otros clientes que desean hacer lo mismo. También, podría suponerse que los tiempos de servicio son aleatorios puesto que la mayor parte de las transacciones no tendrá relación con las otras. Algunas de ellas requerirán un tiempo breve, en tanto que otras pueden ser un tanto prolongadas, pero la distribución general de los tiempos de servicio será aleatoria. En estos momentos existen cuatro líneas diferentes de entrada, cada una de las cuales tiene las mismas unidades. Es decir, los clientes que llegan, en promedio, se distribuirán equitativamente entre las cuatro filas. Con respecto al servicio, son cuatro las personas que atienden y cada una de ellas tiene una tasa de servicio igual a las demás. En este caso, existen cuatro filas que podrían clasificarse en la notación de Kendall como M/M/1: esto es, entrada aleatoria, tiempo de servicio aleatorio y un solo canal de servicio.

Para el sistema propuesto, es posible seguir suponiendo que las llegadas son aleatorias al igual que los tiempos de servicio, pero con cuatro canales de servicio. Por ello, en notación de Kendall, esta situación se describiría como M/M/4.

En este capítulo se consideran primordialmente los canales M/M/1 y M/M/S (en donde S es un entero mayor que uno, que indica el número de canales de servicio). Se hace hincapié en estos tipos de líneas de espera por dos razones principales. En primer

lugar, la ocurrencia de tasas de llegadas y tiempos de servicio aleatorios es muy común en situaciones cotidianas. En segundo lugar, resulta fácil calcular las características de operación de ese tipo de sistemas de líneas de espera. También examinamos en forma breve otros sistemas.

CARACTERÍSTICAS DE LAS LÍNEAS DE ESPERA M/M/1

Llegadas aleatorias

En las situaciones cotidianas es fácil encontrar ejemplos de llegadas aleatorias, puesto que las llegadas serán aleatorias en cualquier caso en el que una de ellas no afecte a las otras. Un ejemplo clásico de llegadas aleatorias son las llamadas que arriban a un conmutador telefónico o un servicio de emergencia.

distribución de Poisson

Se ha determinado que las ocurrencias aleatorias de un tipo especial pueden describirse a través de una distribución discreta de probabilidad bien conocida, la **distribución de Poisson.** Este tipo especial de llegadas aleatorias supone dos características acerca de la corriente de entrada. En primer lugar, se supone que las llegadas son por completo independientes entre sí y con respecto al estado del sistema. En segundo lugar, la probabilidad de una llegada durante un periodo específico no depende de cuándo ocurre el periodo, sino más bien, depende sólo de la longitud del intervalo. Se dice que estas ocurrencias *carecen de "memoria"*. Si conocemos el número promedio de ocurrencias por periodo, podemos calcular las probabilidades acerca del número de eventos que ocurrirán en un periodo determinado, utilizando las propiedades conocidas de la distribución de Poisson.

En particular, si existe un promedio de λ llegadas en un periodo, T, la probabilidad de n llegadas en el mismo periodo está dada por

$$P[n \text{ llegadas en el tiempo } T] = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \qquad (13.1)$$

en donde $e = 2.71828$

$n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$

Por ejemplo, si existe un promedio de 6 llegadas aleatorias por hora, la probabilidad de que haya sólo 3 llegadas durante una hora está dada por

$$P[3 \text{ llegadas en una hora}] = \frac{e^{-6}(6)^3}{3!} = 0.0892$$

Tiempos de servicio aleatorios

Al igual que con las llegadas aleatorias, la ocurrencia de tiempos de servicio aleatorios, carentes de memoria, es un suceso bastante común en las situaciones cotidianas de líneas de espera. Y, al igual que con las llegadas aleatorias, los tiempos de servicio carentes de memoria se describen a través de una distribución a probabilidad. La diferencia entre las llegadas aleatorias y los tiempos de servicio aleatorios es que éstos se describen a

través de una distribución continua en tanto que las llegadas se describen a través de la distribución de Poisson, que es discreta. Si la duración de los tiempos de servicio es aleatoria, la **distribución exponencial negativa** describe ese tipo de tiempo de servicio. Si μ es la tasa promedio de servicio, es decir, el inverso del tiempo promedio de servicio, entonces la distribución está dada por

distribución exponencial negativa

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad (13.2)$$

Es posible emplear esta fórmula para calcular la probabilidad de que el servicio sea más prolongado que alguna duración especificada de tiempo T. Es decir,

$$P(\text{el servicio se tarda más que } T) = P(t > T)$$

en donde t = tiempo de servicio. Utilizando la distribución exponencial negativa, encontramos que

$$P(t \leq T) = 1 - e^{-\mu T} \qquad (13.3)$$

lo cual muestra que

$$P(t > T) = e^{-\mu T}$$

dado que

$$P(t > T) = 1 - P(t \leq T) \qquad (13.4)$$

Comentarios sobre las distribuciones de probabilidad

Las distribuciones exponencial negativa y de Poisson que se analizaron antes pueden considerarse como *distribuciones duales.* Es decir, si ocurren llegadas de acuerdo con la distribución de Poisson, entonces el *tiempo entre llegadas* (tiempo que transcurre entre una llegada y otra) será de acuerdo con la distribución exponencial negativa. Esto quiere decir que si

$$P(0 \text{ llegadas en el tiempo } T) = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^0}{0!} = e^{-\lambda T} \qquad (13.5)$$

en donde $0! = 1$

entonces, esto equivale a

$$P(\text{la primera llegada es después del tiempo } T) = e^{-\lambda T} \qquad (13.6)$$

Por ello, cuando la distribución del *tiempo de servicio* sigue una distribución exponencial negativa, el *número de servicios* sigue una distribución de Poisson. Así, las ocurrencias aleatorias y los tiempos aleatorios entre ocurrencias son equivalentes. En la figura 13-4 se observan ejemplos tanto de la distribución exponencial negativa como de la de Poisson.

Una propiedad importante de la aleatoriedad es que las ocurrencias tienden a agruparse. Contrario a lo que intuitivamente se pensaría, las ocurrencias no se presentan en forma separada, sino en grupos. Quien quiera que haya trabajado en una situación en la que llegan clientes en forma aleatoria puede atestiguarlo. El hecho de que estamos trabajando con tasas promedio no garantiza que cada uno de los eventos ocurrirá a este ritmo durante cualquier periodo determinado; pero, en promedio, esta tasa se presenta a largo plazo.

Condiciones de estado estacionario

condiciones de estado estacionario

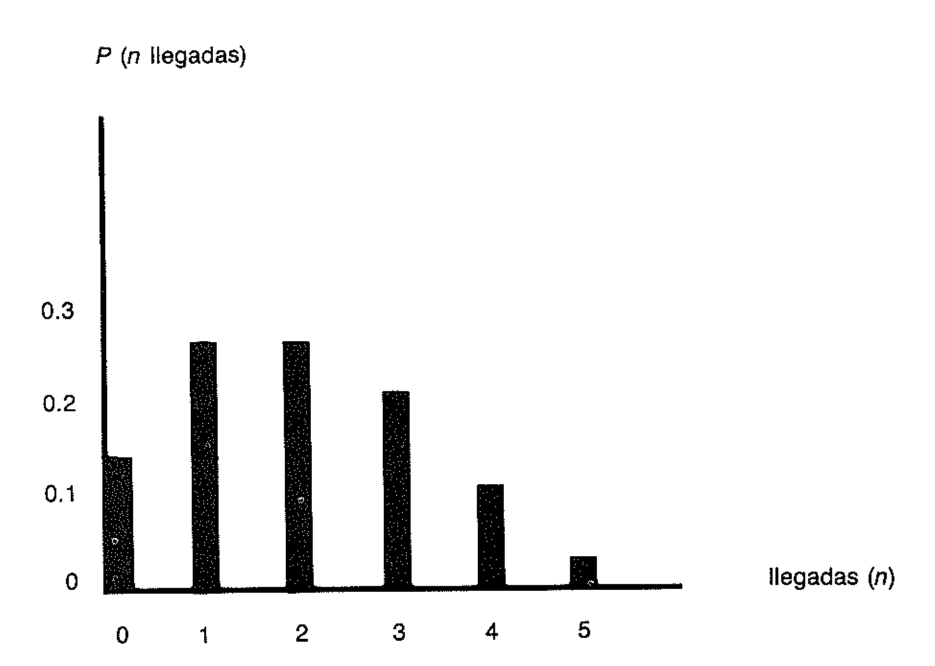
En muchas situaciones de sistemas de líneas de espera, existe un periodo inicial, que es cuando comienza el periodo que se estudia. Este periodo inicial tiene muchas características transitorias que no son similares a los valores promedio a largo plazo que se encuentran cuando se estabiliza el sistema de líneas de espera. Un ejemplo de periodo transitorio es la entrada inicial y apresurada de clientes en un banco cuando se abren sus puertas. No nos interesa este periodo. Deseamos investigar las características promedio a largo plazo que se presentan cuando el sistema ha alcanzado el *estado estacionario* o estable. Estas son las denominadas **condiciones de estado estacionario** que se calcularán para las líneas de espera M/M/1 y M/M/*S*. Se analizan estos valores de estado estacionario porque no dependen de la duración del tiempo que el sistema ha estado operando. Aunque es cierto que algunos sistemas no alcanzan nunca el estado estacionario, muchos de ellos se aproximan lo suficiente para que las características de este estado estacionario resulten útiles para describir el sistema.

Recopilación de datos y distribuciones de probabilidad

Con objeto de emplear un modelo determinado de líneas de espera, en primer lugar debemos validar el modelo; es decir, debemos probar que la situación real de línea de espera "se ajusta" a ese modelo. En nuestro caso, y para utilizar el modelo M/M/1, nos interesa probar que las llegadas son aleatorias y que los tiempos de servicio tienen duración aleatoria. Para hacerlo, necesitamos probar que la tasa real de llegadas se ajusta a la distribución de Poisson y que la tasa real de servicio se ajusta a la distribución exponencial negativa. En primer lugar, debemos recopilar datos sobre los tiempos de llegada y de servicio. Después, puede utilizarse una técnica estadística bien conocida que se denomina prueba de bondad de ajuste ji cuadrada (χ^2) para determinar si los datos se ajustan en realidad a las distribuciones mencionadas.

Para ajustar un modelo particular, por ejemplo el M/M/1, necesitamos recopilar datos sobre la tasa promedio de llegadas, λ, y el tiempo promedio de servicio, $1/\mu$. Para encontrar la tasa promedio de llegadas se mantiene un registro del número de llegadas por unidad de tiempo: hora, día, o el que sea. Después, resulta bastante sencillo calcular el promedio para todos los periodos para los que se recopilaron datos. Por supuesto, se debe tener cuidado de asegurarse que la tasa de llegadas no fluctúa tanto, que haga que el uso de un solo valor de λ resulte poco realista.

Medir los tiempos de servicio es un poco más difícil puesto que no es posible contar simplemente el número de casos de servicio que ocurrieron durante un periodo. Es evidente que a largo plazo este número siempre será igual a la tasa de llegadas y por ello



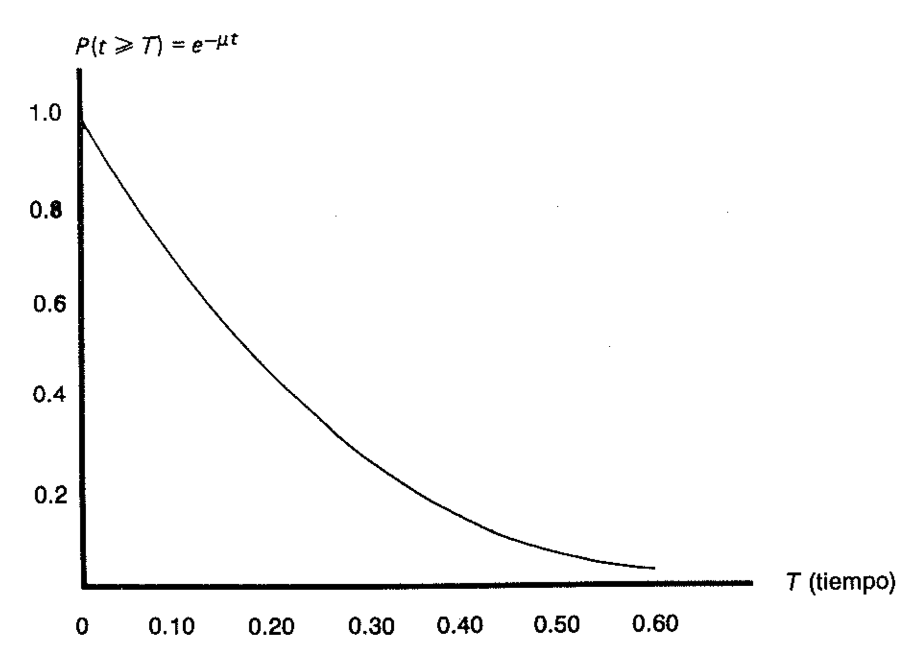


FIGURA 13-4. Patrones de distribución

no sería una medida válida del tiempo promedio de servicio. Es necesario medir en forma individual los tiempos de los servicios. Después, pueden utilizarse estos tiempos para calcular un tiempo promedio de servicio, $1/\mu$.

Consideraciones para las líneas de espera M/M/1

Con el objeto de utilizar las líneas de espera M/M/1, tenemos que suponer llegadas con distribución de Poisson y distribución de servicio exponencial negativa. Para obtener las características de este tipo de líneas de espera, debemos hacer otras consideraciones. En primer lugar, debe haber un solo canal de servicio al cual ingresan las unidades que entran una por una. En segundo lugar, se considera que existe una población infinita de entre la cual se originan las llegadas. También se supone que existe un espacio infinito para dar cabida a las llegadas que esperan en la fila. Por último, se supone que las unidades que llegan se atienden sobre la base de "primero que llega, primero que se atiende" (que también se conoce como PEPS, "primero que entra, primero que sale"). La siguiente lista incluye todas las consideraciones para las líneas de espera M/M/1:

llegadas aleatorias únicas (distribución de Poisson)
tiempos de servicio aleatorios (distribución exponencial negativa)
existe una situación de estado estacionario
un solo canal de servicio
población que llega infinita
espacio de espera infinito
disciplina de servicio de primero que llega primero que se atiende
no hay rechazo
no hay abandono

Ya se han analizado con detalle las tres primeras consideraciones. La cuarta de ellas, la de un solo canal de servicio, se explica por sí misma. Las dos consideraciones siguientes, población que llega infinita y espacio de espera infinito, simplemente significan que siempre estarán llegando clientes y que existe espacio adecuado para que esas unidades que llegan esperen. Estas consideraciones aseguran que la situación de línea de espera no se complique porque exista dependencia entre las llegadas o porque éstas abandonen el sistema por falta de espacio para esperar. La consideración de que el primero que llega es el primero que se atiende asegura que las unidades que llegan posteriormente no son atendidas antes que las que llegaron con anterioridad.

Características de operación de las líneas de espera M/M/1

Para calcular las características de operación de una cola M/M/1, primero debemos observar que si λ = tasa promedio de llegadas y μ = tasa promedio de servicio, entonces λ debe ser menor que μ. Si no fuera así, el promedio de llegadas sería superior al número promedio de unidades que se atienden, y el número de unidades que están esperando se volvería infinitamente grande. Si hacemos que $\varrho = \lambda/\mu$ puede denominarse a ϱ **factor**

de utilización

de utilización. Este valor, $\varrho = \lambda/\mu$, es la *fracción promedio de tiempo que el sistema está ocupado* (ocupado se define como una o más unidades esperando y/o siendo atendidas). Observe que también puede considerarse que ϱ es el *número promedio de unidades que están siendo atendidas en cualquier momento.* En términos de probabilidad

$$P_W = \text{probabilidad de que el sistema esté ocupado}$$
$$P_W = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \qquad (13.7)$$

Entonces, la probabilidad de que el sistema no esté trabajando, o esté vacío, P_0, puede obtenerse por medio de

$$P_0 = 1 - P_W = 1 - \lambda/\mu = 1 - \rho \qquad (13.8)$$

A partir de esto podemos obtener la *probabilidad de que haya n unidades en el sistema,* P_n, mediante

$$P_n = (P_0)(\lambda/\mu)^n = P_0\rho^n \qquad (13.9)$$

en donde n es cualquier entero no negativo. Este importante resultado nos permite calcular las características de operación de las líneas de espera.

La primera característica de operación que calcularemos es el *número promedio de unidades que se encuentran en el sistema,* ya sea esperando o siendo atendidas. Denominaremos a este número promedio de unidades, L. Recuérdese del capítulo 12 que el valor promedio o valor esperado para una distribución discreta de probabilidad está dado por

$$E(X) = \sum_{X=0}^{\infty} XP(X)$$

Por ello, el número esperado de unidades en el sistema está dado por

$$L = \text{número esperado de unidades en el sistema}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} nP_0\rho^n$$

o

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad (13.10)$$

Ahora podemos utilizar L, número esperado de unidades en el sistema, para calcular todas las otras características que deseamos. En primer lugar, nos gustaría conocer el *número promedio de unidades que esperan ser atendidas* o L_q. Dado que L es el número promedio de unidades que están esperando o están siendo atendidas, y ϱ es el número promedio de unidades que están siendo atendidas en algún momento dado, entonces $L = L_q + \varrho$. A partir de esto es fácil observar que

$$L_q = L - \rho$$

o

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{13.11}$$

Examinemos ahora el tiempo de espera. Utilizaremos W para representar el *tiempo promedio o esperado que una unidad se encuentra en el sistema.* Para encontrar W, observamos que si L es el número esperado de unidades en el sistema y λ es el número promedio de unidades que llegan para ser atendidas por periodo, entonces el tiempo promedio que cualquier unidad que llega debe estar en el sistema está dado por

$$W = \text{tiempo esperado de una unidad en el sistema}$$
$$= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{13.12}$$

De manera similar, el *tiempo esperado o promedio que una unidad tiene que esperar antes de ser atendida,* W_q, está dado por

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{13.13}$$

Obsérvese que $W = W_q + 1/\mu$. Esto indica que el total de tiempo invertido en el sistema, W; es igual al tiempo de espera (W_q) más el tiempo de servicio ($1/\mu$).

Ejemplo ilustrativo

Antes de prestar atención al caso del Guarantee Bank and Trust, observemos un ejemplo simple de la M/M/1. Sea $\lambda = 20$ unidades por hora y $\mu = 30$ unidades por hora, de manera que $\varrho = 2/3 < 1$. Ahora podemos calcular las características de este sistema de líneas de espera utilizando las ecuaciones (13.7) – (13.13). En primer lugar

$$P_W = \text{probabilidad de que el sistema esté ocupado}$$
$$= \rho = 2/3$$

entonces

$$P_0 = \text{probabilidad de que el sistema no esté ocupado}$$
$$= 1 - \rho = 1/3$$

Además

$$P_n = \text{probabilidad de que haya } n \text{ unidades en el sistema}$$
$$= P_0(\rho)^n$$
$$= (1/3)(2/3)^n$$

En la figura 13-15, se graficó la distribución de probabilidad para valores de $n = 0, 1, 2, \ldots$ es decir, $P_n = (1/3)\,(2/3)^n$. Obsérvese que la probabilidad de que haya 0 unidades en el sistema, P_0, siempre es mayor que P_n para cualquier $n > 0$. También se ha marcado el número promedio de unidades en el sistema L. Este valor se encuentra de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L &= \text{número esperado de unidades en el sistema} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \\ &= \frac{2/3}{1-2/3} = 2 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Por ello, habrá un promedio de 2 unidades en el sistema.

Utilizando la ecuación (13.11) es posible calcular L_q:

$$\begin{aligned} L_q &= \text{número esperado de unidades que esperan ser atendidas} \\ &= L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} \\ &= 2 - 2/3 = 4/3 \end{aligned}$$

Entonces, en promedio habrá 4/3 unidades esperando ser atendidas y 2/3 de unidad siendo atendida.

Puede calcularse el tiempo promedio que se está en el sistema utilizando la ecuación (13.12):

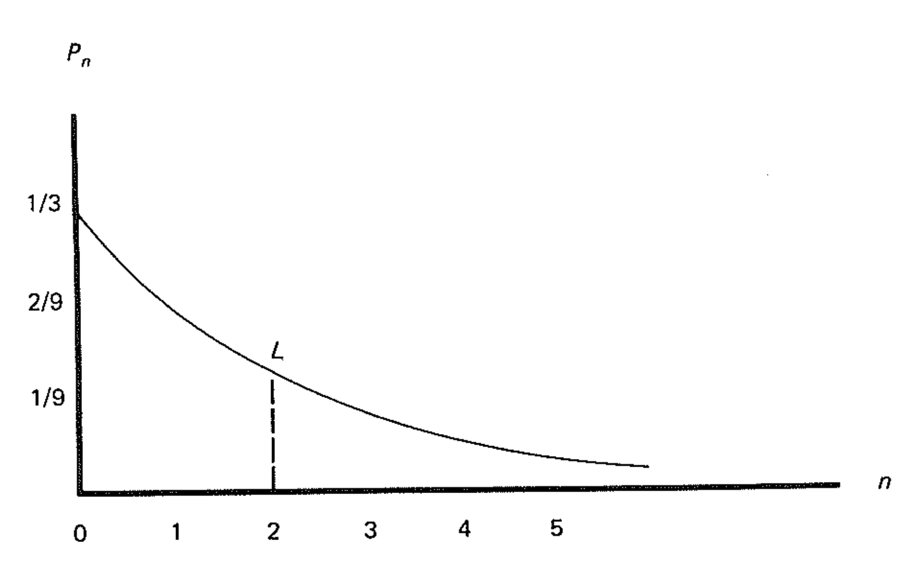


FIGURA 13-5. Distribución de P_n

$W =$ tiempo esperado que una unidad permanece en el sistema

$$= \frac{L}{\lambda} = \frac{2 \text{ unidades}}{20 \text{ unidades por hora}} = \frac{1}{10} \text{ de hora}$$

$= 6$ minutos

De manera similar, el tiempo promedio que una unidad espera para ser atendida está dado por la ecuación (13.13):

$W_q =$ tiempo esperado que una unidad permanece esperando ser atendida

$$= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4/3 \text{ unidades}}{20 \text{ unidades por hora}} = \frac{1}{15} \text{ de hora}$$

$= 4$ minutos

Observe que dada la tasa de servicio $\mu = 30$ unidades/hora, entonces el tiempo de servicio es $1/\mu$, o 1/30 (= 2 minutos). Utilizando esto, puede verse que

$$W = W_q + 1/\mu$$
$$= 4 \text{ minutos} + 2 \text{ minutos}$$
$$= 6 \text{ minutos}$$

En este punto resulta útil observar el efecto que tiene cambiar la tasa de servicio. En los cálculos anteriores encontramos que para $\lambda = 20$ por hora y $\mu = 30$ por hora, $P_0 = 1 - 2/3 = 1/3$. Esto señala que el sistema no está siendo utilizado 1/3 del tiempo. Podría llegarse a la conclusión de que existe algo de holgura en el sistema, la que podría eliminarse reduciendo la tasa de servicio, por ejemplo a través de una reducción del número de trabajadores que atienden la instalación de servicio. Para investigar este efecto, se construye la tabla 13-1 para diversos valores de μ, la tasa de servicio.

En esta tabla puede observarse que cuando el tiempo muerto se reduce de 1/3 a 1/11, la longitud promedio de la línea de espera aumenta en un factor de 5; de 2 a 10 unidades. También se observa que el tiempo que una unidad invierte en el sistema aumenta en un factor de 5, de 6 minutos a 30. Esto ilustra una característica clave de los sistemas de líneas de espera: *el tiempo muerto es necesario para que cualquier sistema de líneas de espera opere de manera eficiente.* El tiempo muerto no sería necesario si las tasas

TABLA 13-1. Características de las líneas de espera con $\lambda = 20$

μ *(unidades/horas)*	P_0	L *(unidades)*	L_q *(unidades)*	W *(minutos)*	W_q *(minutos)*
30	1/3	2	$1\frac{1}{3}$	6	4
28	2/7	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{14}$	$7\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{14}$
25	1/5	4	$3\frac{1}{5}$	12	$9\frac{3}{5}$
22	1/11	10	$9\frac{1}{11}$	30	$27\frac{3}{11}$

de llegada y de servicio fueran constantes, pero en el sistema M/M/1, las llegadas ocurren al azar y por ello es necesario tener holgura en el sistema que permita manejar los periodos en los que la tasa de llegada es mayor que la tasa promedio. Si no fuera así, el sistema se sobrecargaría con rapidez ya que habría un flujo de unidades solicitando servicio superior al promedio. En los modelos de líneas de espera resulta común encontrar que un cambio en los parámetros produce un cambio no lineal en las características de operación.

Comentarios sobre el caso del Guarantee Bank and Trust

En el caso del Guarantee Bank and Trust, los clientes automovilistas llegan al azar a razón de 16 por hora. Cada cajero para automovilistas puede manejar transacciones a una tasa de 8 por hora. El servicio se da sobre la base de que se atiende al primero que llega y existe espacio suficiente en el estacionamiento del banco para dar cabida a cuantos automóviles sea necesario. Dado que en la actualidad existen cuatro líneas en paralelo que funcionan de manera independiente entre sí, es posible dividir la tasa de llegadas en forma equitativa entre las filas. Si se hace esto, se tienen cuatro filas, cada una de ellas con $\lambda = 4$ y $\mu = 8$.

Ahora puede analizarse cada uno de los cuatro cajeros en forma individual y combinar los resultados. En este caso, $\varrho = 4/8 = 1/2$ y $P_0 = 1 - 1/2 = 1/2$. Por tanto,

$$L = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \text{un promedio de 1 automóvil en el sistema}$$

$$L_q = 1 - 1/2 = \text{un promedio de 1/2 de automóvil en la línea de espera}$$

$$W = 1/4 \text{ de hora} = \text{un promedio de 15 minutos en el sistema}$$

$$W_q = \frac{1/2}{4} = 1/8 \text{ de hora} = \text{un promedio de 7 1/2 minutos en la línea de espera para cada cajero de atención a automovilistas}$$

El criterio del señor Smith para tomar una decisión es el tiempo promedio que un cliente invierte esperando en la fila. Con la disposición actual, el tiempo promedio que un cliente espera para obtener servicio es 7 1/2 minutos. En una sección posterior compararemos este valor con el que se obtiene con el nuevo sistema utilizando una fila para alimentar las cuatro cajas.

CARACTERÍSTICAS DE LAS LÍNEAS DE ESPERA M/M/*S*

El modelo que supone llegadas y tiempos de servicio aleatorios para canales de servicios múltiples tiene las mismas consideraciones que el modelo de canal único de servicio (M/M/1), excepto que ahora existe una sola fila de entrada que alimenta los canales múltiples de servicio con iguales tasas de servicio. El cálculo de las características de la línea de espera para el modelo M/M/*S* es algo más complicado que los cálculos para el caso de canal único, y dado que primordialmente nos interesan las implicaciones de estas características más que las fórmulas necesarias para calcularlos, nos apoyaremos en el uso de tablas elaboradas a partir de estas fórmulas para hacer los cálculos.

Características de operación

En el modelo M/M/S, si μ es la tasa promedio de servicio para cada uno de los S canales de servicio, entonces ya no se requiere que $\mu > \lambda$, pero $S\mu$ debe ser mayor que λ para evitar una acumulación infinita de líneas de espera. En el caso de M/M/S, la característica clave que se utilizará para hacer los demás cálculos es la probabilidad de que el sistema esté ocupado. En otras palabras, la probabilidad es de que haya S o más unidades en el sistema. En este caso, todos los canales de servicio se estarán utilizando y por ello se dice que el sistema está ocupado. Esto se escribe como

$$P(\text{sistema ocupado}) = P(n \geq S) \tag{13.14}$$

y puede calcularse utilizando la fórmula

$$P(\text{sistema ocupado}) = \frac{\rho^S(\mu S)}{S!\,(\mu S - \lambda)} \times P_0 \tag{13.15}$$

en donde $$P_0 = 1 \div \left[\sum_{n=0}^{n=S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \left(\frac{S\mu}{S\mu - \lambda}\right) \right] \tag{13.16}$$

Encontrar P(sistema ocupado) utilizando la ecuación (13.15) no es difícil si se tiene el valor de P_0, pero el cálculo de P_0 utilizando la ecuación (13.16) es tedioso. En vez de tener que llevar a cabo la laboriosa tarea de calcular P_0 cada vez que se le necesita, es posible elaborar una tabla que proporcione el valor de P_0 para diversos valores de ϱ (es decir, λ/μ) y S. Esa tabla se proporciona para uso del lector como tabla A-1 del apéndice A del final del texto.

Ahora puede utilizarse esta peculiaridad del sistema para calcular sus demás características. En el modelo M/M/S, al igual que en el M/M/1, se tiene que $L = L_q + \varrho$, pero aquí usamos el valor de P(sistema ocupado) para calcular L_q:

$$L_q = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} \tag{13.17}$$

Y después se calcula L:

$$L = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} + \rho \tag{13.18}$$

En el caso M/M/S, al igual que en el M/M/1, $W = L/\lambda$ y $W_q = L_q/\lambda$, por ello, se tiene

$$W = \frac{1}{\lambda}\left[P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} + \rho \right] \tag{13.19}$$

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\left[P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} \right] \tag{13.20}$$

Todo lo que se necesita hacer es utilizar los parámetros que definen la situación específica, ϱ y S, para encontrar un valor de P_0 en la tabla A-1. Después se emplea este valor para calcular P(sistema ocupado) y todas las demás características de operación.

Ejemplo ilustrativo

Para ejemplificar el modelo M/M/S, suponga que existen cinco canales de servicio con tasas promedio de servicio $\mu = 6$ y una tasa de llegadas λ de 24 unidades por hora. Esto implica que $S = 5$ y

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{6} = 4$$

De la tabla A-1 encontramos que para una $S = 5$ y $\varrho = 4$, $P_0 = 0.0130$. Después, haciendo uso de la ecuación (13.15), P(sistema ocupado) = 0.5547. Utilizando este valor, tenemos

$$L_q = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho}$$

$$= (0.5547)\left(\frac{4}{5-4}\right) = 2.2188 \text{ unidades}$$

$$L = 2.2188 + 4 = 6.2188 \text{ unidades}$$

Empleando las ecuaciones (13.19) y (13.20),

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{6.2188 \text{ unidades}}{24 \text{ unidades por hora}} = 0.2591 \text{ de hora}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.2188}{24} = 0.0925 \text{ de hora}$$

Comentarios sobre el caso del Guarantee Bank and Trust (continuación)

Para continuar la comparación de los servidores únicos o simples múltiples (situación actual) con el plan que se propone de canales de servicio múltiple en el Guarantee Bank and Trust, necesitamos calcular primero las características de la línea de espera para este último caso utilizando los resultados del modelo M/M/S que se presentaron en la sección anterior.

El sistema que se propone consta de cuatro canales de servicio, todos ellos con tasas de servicio de 8 por hora. La tasa de entrada es de 16 clientes por hora. Por ello, los parámetros son $\varrho = 16/8 = 2$ y $S = 4$. Para estos valores, se localiza $P_0 = 0.1304$ en la tabla A-1 y se calcula P(sistema ocupado) = 0.1739 usando la ecuación (13.15). Utilizando este valor de P(sistema ocupado), pueden calcularse las características de la línea de espera como sigue:

$$L_q = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho}$$

$$= (0.1739)\left(\frac{2}{4-2}\right) = \text{un promedio de 0.1739 de automóvil en la línea de espera}$$

$$L = L_q + \rho = \text{un promedio de 2.1739 automóviles en el sistema}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.1739}{16} = \text{un tiempo promedio en el sistema de 0.1359 de hora u 8.154 minutos}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.1739}{16} = \text{un tiempo promedio en la línea de espera de 0.0109 de hora o 0.654 de minuto}$$

Si se compara el W_q de 7 1/2 minutos para 4 filas individuales (el sistema actual de la Guarantee) con un W_q de 0.654 minutos para una sola fila, se tiene un mejoramiento drástico en el servicio.

EJEMPLO ECONÓMICO

En el caso del Guarantee Bank and Trust Company, nos ocupamos del tiempo que los clientes esperaban antes de ser atendidos, en vez del tiempo total que un cliente invierte en el sistema, puesto que es probable que el cliente promedio no considere el tiempo que se invierte en atenderlo como parte del tiempo que invierte en esperar. Por otra lado, existen ejemplos muy definidos en los que el tiempo que se invierte en el sistema es la clave determinante del servicio. Por ejemplo, considere la Wheat-n-Corn Shipping Company.

La Wheat-n-Corn Shipping Company envía trigo, maíz, avena y otras semillas al extranjero en barcos cargueros. La compañía *no* es propietaria de los barcos de carga sino que simplemente le vende los granos al propietario de los barcos en los casos en que llega un carguero para ser atendido. No hay un programa fijo de llegadas de barcos porque dependen del clima, del precio de los granos, de las condiciones internacionales, etc., y por ello puede suponerse que las naves llegan al azar, lo que sucede a una tasa promedio de una diaria. Debido a las diversas capacidades de los barcos y distintas configuraciones de la carga, la compañía no puede conocer con exactitud cuánto tiempo llevará cargar uno. En el momento actual, existe espacio para cargar un solo barco a la vez. También, debido a diversos acuerdos sindicales, toda la labor de carga deben llevarla a cabo empleados de la Wheat-n-Corn Company y no la tripulación del carguero. Esta restricción significa que mientras el barco espera ser cargado y mientras se está cargando, la tripulación del navío permanece desocupada. Dado que la utilidad del propietario de los barcos depende de un tiempo breve (entre el momento en que los barcos llegan a ser cargados y el momento en que se termina esta labor), y puesto que la Wheat-n-Corn Company atiende un mercado de compradores debido al superávit de producción de granos en los Estados Unidos, la Wheat-n-Corn Company ha acordado pagarles a los propietarios de los buques $1,000 por día completo que el barco invierte en ser cargado *o* en esperar que se le cargue. Este pago es para compensar al propietario de los barcos por las utilidades que pierde mientras el buque se carga en el muelle de la Wheat-n-Corn.

De acuerdo con los registros de la compañía, un equipo de tres estibadores puede cargar los barcos a una tasa promedio de 1/4 de barco por día. Los equipos pueden

trabajar juntos sin interferencia entre ellos, por lo que la tasa resultante de carga está dada por

Barcos que se cargan por día = (número de equipos) (1/4 barco por día por equipo)

Por ejemplo, 3 equipos podrían cargar 3/4 de barco por día de trabajo. En el momento actual los equipos trabajan turnos de 8 horas, 7 días a la semana, y los trabajadores de cada equipo reciben de la compañía $10 por hora.

Es necesario determinar cuántos equipos deben tenerse disponibles para cargar los buques. Nos gustaría minimizar los costos totales, es decir, la cantidad de la cuota diaria que se paga a los barcos que se encuentran en el sistema de carga y el costo de los equipos para cargarlos.

El problema que enfrenta la Wheat-n-Corn es de intercambios. Si se utiliza un solo equipo, se obtiene un costo de mano de obra reducido (costo por cargar), pero se incurre en una cuota de muelle considerable (costo de espera). Si se utiliza un número grande de equipos se obtiene como resultado una cuota menor de muelle, pero también se elevan los costos de mano de obra. El intercambio o equilibrio de los costos de cargar y los costos de espera se muestran en la figura 13-6.

Dado que los modelos de línea de espera son *descriptivos* más que *normativos*, no es posible determinar el número óptimo de equipos usando un algoritmo. Tendremos que calcular las características de la línea de espera y los costos para diversos números de equipos y elegir después la situación que produzca el menor costo. Como auxiliar en este análisis, puede utilizarse un método tabular en el cual se listan los números de equipos, las características de sus líneas de espera y sus costos asociados.

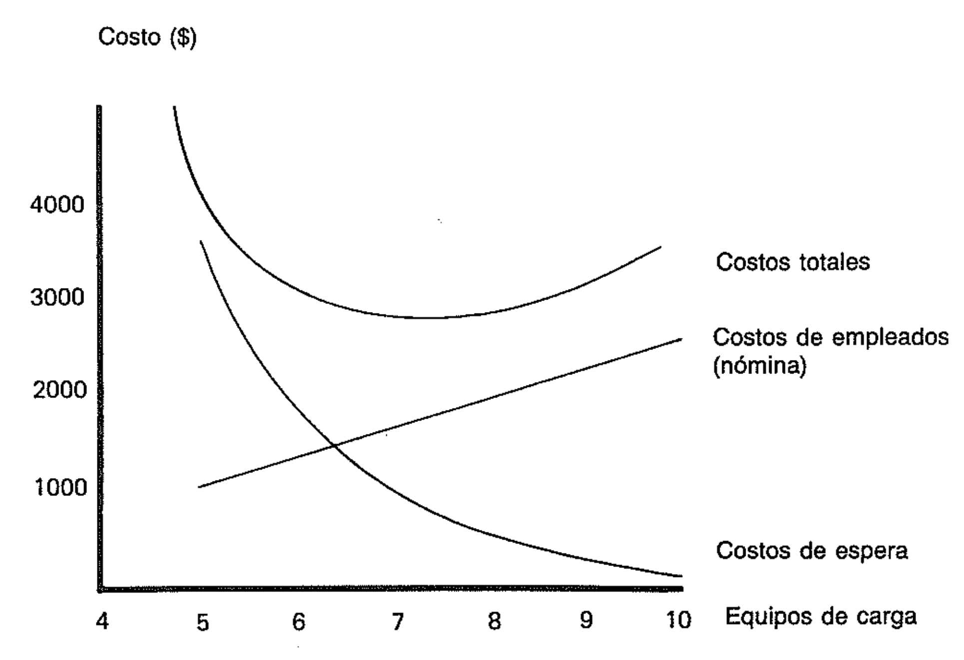


FIGURA 13-6. Comparación de costos totales, de empleados (nómina) y de espera

Solución para el ejemplo del caso M/M/1

En primer lugar, observe que la llegada de los barcos y los tiempos de carga son aleatorios y que sólo existe una instalación de servicio; por ello, se presenta una situación de filas tipo M/M/1. En este caso, $\lambda = 1$ por día y $\mu = (m)(1/4)$ en donde m = número de equipos. Es evidente que m deber ser mayor que 4 con el objeto de que $\mu > \lambda$. Observe también que cada equipo cuesta \$ 240 por día (\$10 por hora × 8 horas × 3 personas). Recuerde también que la compañía paga \$1,000 por día y por barco que se encuentra en el sistema. Por ello, el costo diario total, TC, está dado por

costos de los empleados (nómina) + cuotas de los barcos

es decir,

$$TC = 240m + 1000L \tag{13.21}$$

Utilizando esta relación determinaremos ahora los valores de TC para diversos números de equipos. Para hacer esto, necesitamos calcular las características de las líneas de espera. Los resultados se muestran en la tabla 13-2.

Se observa que la Wheat-n-Corn Company minimizaría sus costos si utilizara 8 equipos para cargar los barcos que llegan. El costo mínimo es \$2,920 por día. En promedio, los barcos estarán en el sistema un solo día e invertirán la mitad de ese día esperando para ser cargados.

Solución al ejemplo del caso para M/M/*S*

Supongamos ahora que la Wheat-n-Corn Company tiene la oportunidad de rentar en \$500 diarios una instalación adicional para cargar. La instalación disponible es muy

TABLA 13-2. Costos para una sola instalación de carga

	Número de equipos (m)					
	5	6	7	8	9	10
λ	1	1	1	1	1	1
μ	5/4	6/4	7/4	8/4	9/4	10/4
ρ	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10
P_0	1/5	1/3	3/7	1/2	5/9	6/10
L	4	2	4/3	1	4/5	2/3
L_q	16/5	4/3	16/21	1/2	16/45	4/15
W	4	2	4/3	1	4/5	2/3
W_q	16/5	4/3	16/21	1/2	16/45	4/15
Costo de los empleados (nómina)	\$1200	\$1440	\$1680	\$1920	\$2160	\$2400
Costo de espera	\$4000	\$2000	\$1333.3	\$1000	\$800	\$666.7
Costo total	\$5200	\$3440	\$3013.3	\$2920	\$2960	\$3066.7

similar a la que se utiliza en la actualidad y los equipos de empleados que laboran en la instalación actual pueden trabajar con la misma eficiencia en la instalación rentada. La compañía desea determinar si le resultaría más económico rentar la segunda instalación o quedarse con su plan actual.

El caso de las dos instalaciones es un ejemplo de una situación de colas M/M/S en la que $S = 2$. Para examinar el caso supondremos que se asignarán números iguales de equipos a cada una de las instalaciones. En este caso, $\lambda = 1$ y $\mu = (m)(1/4)$, en donde m = número de equipos en cada instalación. En esta situación, deberemos tener

$$\lambda < \mu S \quad \text{o bien} \quad 1 < (m)(1/4)\,(2)$$

dado que $\lambda = 1$, entonces $m > 2$ en cada instalación.

En primer lugar, necesitamos calcular

$$P(\text{sistema ocupado}) = \frac{\rho^S \mu S}{S!(\mu S - \lambda)} \times P_0$$

para diversos valores de $m > 2$. Después, necesitamos encontrar las características de las líneas de espera y los costos para esos valores de m. Si el costo mínimo para el plan con dos instalaciones es inferior que los costos para una instalación, recomendaríamos que la Wheat-n-Corn Company rentara la instalación extra.

Para el caso de dos instalaciones el costo diario total está dado por

costo de los empleados (nómina) + cuotas de los barcos + costo de rentas

o bien

$$TC = (2)(m)(240) + (L)(1000) + 500 \tag{13.22}$$

TABLA 13-3. Costos para dos instalaciones

	Número de equipos por instalación (m)			
	3	*4*	*5*	*6*
λ	1	1	1	1
μ	3/4	1	5/4	6/4
ρ	4/3	1	4/5	2/3
P_0	0.1993	0.3333	0.4286	0.5050
P(sistema ocupado)	0.5315	0.3333	0.2286	0.1683
L_q	1.0630	0.3333	0.1524	0.0842
L	2.3963	1.3333	0.9524	0.7509
W_q	1.0630	0.3333	0.1524	0.0842
W	2.3963	1.3333	0.9524	0.7509
Costo de los empleados (nómina)	$1440	$1920	$2400	$2880
Cuota de los barcos	2396	1333	952	751
Cuota de rentas	500	500	500	500
Costo total	$4336	$3753	$3852	$4131

Observe que se ha duplicado el costo de los empleados (nómina) porque se utilizan m equipos en cada instalación. Los cálculos necesarios para evaluar el plan de costo mínimo se presentan en la tabla 13-3.

En esta tabla puede observarse que la configuración de menor costo para el caso de las dos instalaciones tiene un costo de \$3,753 y emplea cuatro equipos por instalación ($m = 4$). Este costo es más elevado que la configuración más económica utilizando una sola instalación de carga, y por ello *no* sería aconsejable que la Wheat-n-Corn Company rentara y asignara personal a la instalación adicional.

OTROS MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA

Tal como se analizó al principio del capítulo, existen muchos tipos de modelos de líneas de espera, aparte de los modelos M/M/1 y M/M/S que se han analizado hasta este punto. Por desgracia, la mayoría de las fórmulas que se requieren para calcular las características de operación para estos otros modelos de líneas de espera son demasiado complicadas para presentarlas en un texto como éste. En esta sección consideraremos otros tres casos. Son los modelos M/G/1, M/D/1 y el modelo de la "Fórmula de la Llamada Perdida de Erlang".

El caso M/G/1

El primer caso que consideraremos es la situación en la que las llegadas se distribuyen de acuerdo con la distribución de Poisson, al igual que en los casos anteriores, pero los tiempos de servicio no necesariamente se distribuyen de acuerdo con la distribución exponencial negativa. Si consideramos el caso en el que existe un solo canal, estamos considerando el caso M/G/1, es decir, llegadas tipo Markov, tiempo de servicio general y un canal de servicio. Obsérvese que este caso incluye también el caso M/D/1.

La razón por la que podemos considerar el caso M/G/1 es que las fórmulas que se utilizan para calcular sus características de operación son bastante simples. Al igual que con el caso M/M/S, no es posible calcular en forma directa L, número esperado de unidades en el sistema. Más bien, debe calcularse L_q, número de unidades que esperan ser atendidas, y utilizar el resultado de que $L = L_q + \varrho$ para encontrar el valor de L. Para calcular L_q, debemos conocer el valor de la desviación estándar de la distribución que describe los tiempos de servicio, σ. Si no se conoce la distribución de los tiempos de servicio no es posible determinar las características de operación. Sin embargo, si conocemos la desviación estándar y la media de la distribución de los tiempos de servicio, puede obtenerse la fórmula para el valor de L_q a partir de la ecuación (13.23):

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1 - \lambda/\mu)} \tag{13.23}$$

Utilizando L_q, podemos ahora determinar el valor de L a través de (10.24):

$$L = L_q + \rho \tag{13.24}$$

Al igual que con las características de operación de los casos M/M/1 y M/M/S, podemos determinar W, tiempo esperado en el sistema de líneas de espera, y W_q, tiempo de espera que se invierte antes de ser atendido, dividiendo L y L_q entre el valor de λ, es decir,

$$W = L/\lambda \tag{13.25}$$

y

$$W_q = L_q/\lambda \tag{13.26}$$

Por ejemplo, suponga que se ha encontrado que en el caso del Guarantee Bank and Trust los tiempos de servicio para los cajeros que atienden automovilistas siguen una distribución normal con media $1/\mu$, o 1/8 de hora y desviación estándar de 1/12 de hora. Utilizando estos valores, junto con una tasa de llegadas, λ, de 4 por hora en las ecuaciones (13.23)-(13.26), obtenemos:

$$L_q = \frac{4^2(1/12)^2 + (4/8)^2}{2(1 - 4/8)} = \text{un promedio de 0.36 personas en la línea de espera}$$

$$L = 0.36 + 0.5 = \text{un promedio de 0.86 personas en el sistema}$$

$$W_q = 0.36/4 = 0.090 \text{ de hora o 5.4 minutos en la línea de espera}$$

$$W = 0.86/4 = 0.2150 \text{ de hora o 12.9 minutos en la línea de espera}$$

Si comparamos estos valores con los que se obtuvieron para el caso M/M/1, encontramos que los valores de este modelo son mayores. Esto es así porque la desviación estándar de la distribución exponencial negativa es igual a su media, es decir, 1/8, lo que es mayor que la desviación estándar de la distribución de nuestro ejemplo modificado, 1/12. Este valor mayor de la desviación estándar da como resultado un valor L_q de 0.5 personas en la fila, que es mayor en el caso de la distribución exponencial negativa que para el caso de la distribución normal.

El caso M/D/1

El caso en el que los tiempos de servicio son determinísticos es el M/D/1, que es un caso especial de la situación M/G/1 que se analizó antes y en el que la desviación estándar es igual a cero. En este caso, se obtiene el valor de L_q a través de la siguiente fórmula:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2(1 - \lambda/\mu)} \tag{13.27}$$

y todas las demás características de operación pueden determinarse a partir de este valor.

Por ejemplo, suponga que el Guarantee Bank and Trust ha decidido instalar un cajero automatizado de atención a automovilistas, para las personas que desean hacer un solo retiro o depósito. El banco ha entablado pláticas con respecto a esta unidad automatizada con un fabricante y se le ha informado que en estos casos el tiempo de servicio es *constante* con 7 1/2 minutos (8 por hora). Para determinar las características

de operación de este nuevo sistema, es necesario utilizar la ecuación (13.27) para obtener el valor de L_q con una desviación estándar de cero, puesto que no existe varianza en los tiempos de servicio:

$$L_q = \frac{(4/8)^2}{2(1 - 4/8)} = 0.25 \text{ personas en la línea de espera}$$

A partir de esto obtenemos:

$$L = 0.25 + 0.5 = 0.75 \text{ personas en el sistema}$$

$$W = 0.25/4 = 0.0625 \text{ de hora o } 3.75 \text{ minutos}$$

$$W_q = 0.75/4 = 0.1875 \text{ de hora o } 11.25 \text{ minutos}$$

Observe que estos tiempos son aún menores que los que se obtuvieron para el caso general. De nuevo, esto es resultado de la menor desviación estándar (en este caso de cero).

Fórmula de la Llamada Perdida de Erlang

Un resultado útil que no depende de las distribuciones de probabilidad que describen las llegadas o los tiempos de servicio se conoce como Fórmula de la Llamada Perdida de Erlang, en honor de quien originó el estudio de las líneas de espera. Esta fórmula permite determinar la probabilidad de que se "pierda" una llamada que llega a un conmutador, debido a que quien la realiza obtiene señal de ocupado. En esta fórmula se considera que el número de líneas que llegan al conmutador es igual al número de operadores que están listos pra responder las llamadas y es muy útil para determinar el número de líneas telefónicas que se requieren en un centro de atención de urgencias.

La fórmula es

$$P(\text{llamada perdida}) = \frac{\dfrac{\rho}{n!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} \qquad (13.28)$$

en donde n es el número de líneas y $\varrho = \lambda/\mu$.

Como ejemplo del uso de esta fórmula, suponga que tenemos tres líneas y tres operadores con una tasa de llegada de 10 llamadas por hora y una longitud promedio de las llamadas de 3 minutos. Esto nos da una tasa de llegadas, λ, de 10 y una tasa de servicio, μ, de 20, lo cual da como resultado un valor de $\varrho = 0.5$. Al integrar estos valores en la Fórmula de la Llamada Perdida, encontramos que la probabilidad de que una llamada no se responda es 0.050 para tres líneas y tres operadores.

RESUMEN

En este capítulo hemos considerado el amplio campo de estudio conocido como *teoría de líneas de espera* y su aplicación a problemas en áreas como servicio a clientes y economía. Estas son sólo dos de las muchas aplicaciones de la teoría de líneas de espera.

Hicimos notar que los modelos de líneas de espera son *descriptivos* y *estocásticos*. También vimos que los diversos modelos de líneas de espera se diferencian mediante las consideraciones en que se basa cada uno, y que cada modelo se distingue por *parámetros* tales como la tasa de llegadas y número de canales de servicio. Utilizando estos parámetros, es posible calcular las *características de operación* para cada modelo. Puesto que los modelos son descriptivos, la única manera de optimizarlos es cambiando los parámetros del modelo y volviendo a calcular las características de operación hasta encontrar el conjunto de parámetros que mejor se ajuste a las necesidades del usuario.

Este proceso se aplicó a dos modelos bastante conocidos de líneas de espera. En la notación de Kendall, fueron los modelos M/M/1 y M/M/*S*. En ambos casos, se supone que las llegadas y los servicios ocurren al azar. En el primero existe sólo un canal de servicio en tanto que en el segundo existen *S* canales de servicio. En ambos casos, se vieron las características de operación como funciones de la tasa de llegadas, λ, y la tasa de servicio, μ. Después, se aplicaron estos modelos a un problema de servicio a clientes y a un problema económico para determinar el mejor plan para las instalaciones y/o los trabajadores.

Además de los modelos M/M/1 y M/M/*S*, comentamos también los modelos M/G/1 y M/D/1. Las características de operación para los sistemas de líneas de espera que tienen llegadas tipo Markov y tiempos de servicio generales o determinísticos pueden calcularse utilizando las fórmulas que se presentaron para estos modelos. En el caso del modelo M/G/1, es necesario conocer la desviación estándar de la distribución del tiempo de servicio. También se analizó la Fórmula de la Llamada Perdida de Erlang, que no depende de distribuciones específicas de llegada o de tiempo de servicio, y que puede utilizarse para determinar la probabilidad de no responder una llamada que llega a un conmutador.

Los lectores no deben pensar que M/M/1, M/M/*S*, M/G/1 y M/D/1 son los únicos modelos de líneas de espera que pudieran encontrarse. Por el contrario, en casi cualquier edición de las revistas *Operations Research* o *Management Science*, aparecen nuevos trabajos sobre modelos más complejos de líneas de espera. Algunos ejemplos recientes incluyen trabajos sobre sistemas de líneas de espera de servidores y sistemas de líneas de espera bajo condiciones transitorias más que estacionarias.

En este capítulo se pretendió presentar los conceptos y usos fundamentales de la teoría de líneas de espera. Al final del capítulo se incluye una lista de referencias para los lectores que deseen investigar más este interesante tema.

GLOSARIO

canal: instalación de servicio.

características de operación: valores promedio que describen la forma en que se comporta el sistema de líneas de espera. Por ejemplo, el tiempo promedio de espera.

condición estacionaria: condición de un sistema de líneas de espera en la que las condiciones iniciales no afectan el cálculo de las características de operación.

distribución exponencial negativa: distribución de probabilidad que describe el tiempo que transcurre entre ocurrencias aleatorias.

distribución de Poisson: distribución probabilística que describe el número de ocurrencias aleatorias en un periodo determinado.

factor de utilización: razón entre la tasa de llegada promedio (λ) y la tasa promedio de servicio (μ). Esta es la fracción de tiempo que el sistema se encuentra ocupado.

líneas de espera o "colas": una o más unidades (personas, máquinas, etc.), que esperan ser atendidas.

llegadas (servicio) aleatorias: llegadas (servicios) que ocurren de manera tal que la ocurrencia de una llegada (servicio) no se ve afectada de manera alguna por otras llegadas (servicios). Con frecuencia se denominan llegadas (servicio) markovianos.

M/D/1: sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, tiempos de servicio constante, una línea de servicio y una línea de espera.

M/G/1: sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, distribución general de los tiempos de servicio (para la cual se supone conocida la desviación estándar), un canal de servicio y una línea de espera.

notación de Kendall: método abreviado para describir los sistemas de líneas de espera.

sistema de líneas de espera: todas las unidades que se encuentran, ya sea en la fila esperando ser atendidas, o siendo atendidas en realidad.

sistema de líneas de espera de canales múltiples: sistema de líneas de espera en el que las instalaciones de servicio están dispuestas en paralelo.

sistema de líneas de espera de etapas múltiples: sistema en la que las instalaciones de servicio se disponen en serie.

sistema de líneas de espera M/M/*S*: sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, servicio aleatorio, *S* canales de servicio y una línea de espera.

tasa de llegada (λ): número promedio de llegadas por unidad de tiempo.

tasa de servicio (μ): número promedio de unidades que podrían atenderse por unidad de tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Cox, D. R., y H. D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes,* London: Methuen, 1968.
2. Cox, D. R., y W. L. Smith. *Queues.* New York: Wiley, 1961.
3. Gross, D., y C. M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory.* New York: Wiley (Interscience). 1974.
4. Saaty, Thomas L. *Elements of Queueing Theory with Aplications.* New York: McGraw-Hill, 1961.
5. Wagner, Harvey M. *Principles of Operations Research,* 2a. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1975, Capítulo 20.

PREGUNTAS DE REPASO

1. Comente por qué siempre suponemos que $\lambda < \mu$. ¿Puede usted concebir una situación en la que sería aceptable que λ fuera igual a μ?
2. ¿Cuáles de las consideraciones de los modelos de líneas de espera M/M/1 encuentra usted que son menos realistas? ¿Por qué?
3. Elija una línea de espera común con la que usted esté familiarizado y responda las preguntas de la página 582 con objeto de clasificarla en el modelo apropiado de líneas de espera. Escriba la notación de Kendall para la situación que seleccionó.
4. Con referencia a la pregunta 3, ¿qué características de operación del modelo que eligió es la más importante? ¿Por qué?
5. Mencione cuando menos una situación de línea de espera con la que usted esté familiarizado y que se ajuste a las consideraciones del modelo M/M/1 (o M/M/*S*).
6. Con referencia a la pregunta 5, comente los procedimientos de recopilación de datos y validación del modelo para la situación que eligió.

7. Piense en otras situaciones de líneas de espera que usted haya encontrado y que *podrían* ajustarse a cada uno de los siguientes modelos:

   a. M/D/1 b. D/M/1 c. D/D/1 d. M/G/1

PROPOSICIONES FALSO/VERDADERO

1. Los modelos de líneas de espera son al mismo tiempo descriptivos y determinísticos.
2. Las características de operación para los modelos de líneas de espera son valores promedio a largo plazo, y no valores que pueden ocurrir en realidad.
3. En un sistema de líneas de espera de etapas múltiples, en el que la primera etapa es M/M/1, el patrón de llegadas a la segunda etapa sería determinístico.
4. Un sistema de líneas de espera con filas paralelas, en el que los clientes pueden cambiarse de línea (denominado "maniobrar") puede de cualquier manera plantearse como un sistema múltiple M/M/1.
5. Una característica de la distribución de Poisson es el "agrupamiento" de los eventos.
6. Para calcular el tiempo promedio de servicio, sólo es necesario contar el número de ocurrencias por hora y tomar el recíproco de este número.
7. El número promedio de unidades que se encuentran en el sistema debe ser siempre mayor que el número promedio de unidades que esperan en la fila.
8. Es posible eliminar la "holgura" de un sistema de líneas de espera aumentando la tasa de servicio sin afectar en forma adversa el tiempo de espera de los clientes.
9. En un modelo M/M/S, no se considera que el sistema esté "ocupado" a menos que todos los canales de servicio estén llenos.
10. La Fórmula de la Llamada Perdida de Erlang sólo funciona cuando las llegadas son Poisson y los tiempos de servicios son exponenciales negativos.

PROBLEMAS

1. Utilizando la notación de Kendall, describa cada una de las siguientes situaciones de líneas de espera:
   a. Estudiantes que llegan al azar para utilizar una máquina copiadora y cada estudiante hace un sola copia.
   b. Botellas que salen de una línea de ensamble a una tasa constante para inspección. El tiempo de inspección es de duración aleatoria y hay 4 inspectores.
   c. Estudiantes que llegan al azar a una oficina de registro previo para el trimestre de otoño. El tiempo de registro es de duración aleatoria y existe un asesor disponible para el registro.

2. Para usar una máquina cajera automática de un banco, llegan clientes al azar a una tasa de 5 por hora. Responda las siguientes preguntas utilizando la tabla A-2 del apéndice.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de tres clientes a solicitar servicio durante un periodo de una hora?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún cliente solicite servicio durante un periodo de una hora?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de dos clientes exactamente en una hora? ¿Tres clientes?

3. Suponiendo que la máquina cajera maneja solicitudes de servicio en forma aleatoria a una

tasa promedio de 10 clientes por hora, responda las siguientes preguntas utilizando la tabla A-3 del apéndice.

a. ¿Cuál es la duración promedio del tiempo de servicios a clientes?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que se requiera que un cliente espere más de 10 minutos para ser atendido?
c. ¿A qué porcentaje de los clientes se les atenderá en menos de 3 minutos?

4. Suponga que para la máquina cajera automática de los dos problemas anteriores, los clientes llegan al azar y el tiempo necesario para dar servicio a un cliente es también aleatorio. Suponga además que la tasa de llegadas es de 5 por hora y la tasa de servicio es de 10 por hora. Responda las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que a un cliente se le atienda de inmediato, a su llegada, en la cajera automática?
   b. ¿Cuál es el promedio de tiempo que un cliente invierte con la cajera automática (tanto en espera del servicio como recibiéndolo)?
   c. Trace la gráfica de P_n con respecto a n, en donde n = número de clientes en el sistema. Marque en la gráfica el valor esperado de n.
   d. En promedio, ¿cuántos clientes se encuentran esperando en la línea para que la cajera automática los atienda.

5. Comente si cada una de las siguientes situaciones de líneas de espera se ajusta a las consideraciones del modelo M/M/1 o M/M/S.
   a. Un restaurante de comida instantánea con múltiples posiciones de servicio. Las posiciones se abren conforme es necesario.
   b. Un restaurante de comida instantánea con una sola fila de servicio, por la cual deben pasar todos los clientes para hacer y recibir sus pedidos (de diferente volumen y complejidad).
   c. En un banco, la ventanilla para automovilistas.
   d. Una instalación para lavado de automóviles con una sola fila que conduce a instalaciones múltiples de lavado.
   e. Una tienda de abarrotes grande en un poblado universitario y que tiene múltiples cajas de salida.

6. La línea rápida del K-Roger Supermarket atiende sólo clientes con 12 artículos o menos, y como resultado, es mucho más veloz para estos clientes que las filas normales. El gerente, Wayne Edwards, ha estudiado esta fila y ha determinado que los clientes llegan a una tasa aleatoria de 30 por hora y que, en promedio, el tiempo de servicio para un cliente es de un minuto. Suponiendo que la tasa de servicio también es aleatoria, responda las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuáles son μ y λ para la caja rápida?
   b. En promedio, ¿a cuántos clientes se está atendiendo o están esperando?
   c. En promedio, ¿cuánto debe esperar un cliente antes de poder retirarse?

7. En el mostrador de libros de la principal biblioteca de la Universidad de Hard Knocks llegan estudiantes al azar (los colores de la escuela son negro y azul). En el mostrador de salida deben abrir cualesquier bolsas, portafolios, etc., que traigan para que el dependiente verifique si no hay robos de libros, revistas o documentos. El tiempo que se requiere para hacer esta verificación es de duración aleatoria debido al diferente número de libros y bolsas que los estudiantes llevan. Se ha determinado que la tasa promedio de llegadas es 20 estudiantes por hora y que el tiempo promedio para realizar la revisión de las bolsas es de un minuto.
   a. ¿Qué valores tienen λ y μ para este problema?
   b. ¿Cuál es el factor de utilización?
   c. ¿Qué tiempo le llevará a un estudiante promedio pasar por la revisión de bolsas?
   d. ¿En promedio, cuántos estudiantes se encuentran esperando en la fila en cualquier momento?
   e. ¿Durante qué fracción de tiempo estará libre el empleado que revisa las bolsas para poder dedicarse a estudiar?

8. El autocinema Oconee tiene tres taquillas, cada una de las cuales atiende una fila de clientes. Los automóviles llegan al autocinema a una tasa total de 90 automóviles por hora y cada taquilla puede atender 40 automóviles por hora. Tanto las llegadas como los servicios son por completo aleatorios. Con base en esta información responda las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué tipo de situación de líneas de espera es ésta? (Sea preciso).
   b. Cuál es la probabilidad de que, si consideramos una sola de las taquillas, se encuentre desocupada? ¿Cuál es la probabilidad de que esté atendiendo a tres automóviles o haya tres automóviles esperando en la fila?
   c. ¿Cuál es el número promedio de automóviles en el sistema de líneas de espera de cada una de las taquillas (esperando y siendo atendidos)?
   d. ¿Cuál es el tiempo promedio que un automóvil espera *antes* de llegar a la taquilla?
   e. Si el autocinema decide utilizar una sola fila para la venta de todos los boletos en las tres taquillas, ¿qué característica de operación esperaría usted que cambiara más? ¿Por qué?

9. El centro de reparación de computadoras TV Shak de McLeod, Montana, maneja la reparación de las microcomputadoras que vende TV Shak. Un problema común de reparación es la alineación de unidades de disco. Al llegar las microcomputadoras al centro de reparación se asigna en forma rotatoria a uno de los tres técnicos para que haga la alineación. Por razones de control de calidad, una vez que se asigna una microcomputadora a un técnico, no se asigna a otro. Suponiendo que las tasas de llegada y de servicio son aleatorias y de 30 por mes y 2 por día por cada técnico (20 días hábiles por mes), responda las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuál será el tiempo promedio que una microcomputadora permanece en el centro de servicio?
   b. En promedio, ¿en cualquier momento, cuántas micros estarán esperando a cada técnico para que les dé servicio?
   c. ¿Cómo respondería usted las preguntas anteriores si una microcomputadora que llega pasara al primer técnico disponible para que le diera servicio, en vez de que se asignara en forma rotatoria?

10. La compañía arrendadora de automóviles U-Drive-'em opera su propia instalación de lavado y limpieza de automóviles para prepararlos para su renta. Los automóviles llegan a la instalación de limpieza en forma aleatoria a una tasa de 5 por día. La compañía arrendadora ha determinado que los automóviles pueden limpiarse a un ritmo de $2n$ por día, en donde n es el número de personas que trabajan en un automóvil. Por ejemplo, si se encuentran 4 personas trabajando la tasa de lavado es de 8 automóviles por día. Se ha determinado que este procedimiento de lavado se ajusta a la distribución exponencial negativa. La compañía les paga a sus trabajadores $30 por día y ha determinado que el costo por un automóvil que no esté disponible para rentarlo es de $25 por día.
    a. Calcule el número de empleados que deben contratarse en la instalación de lavado, para que produzca el menor costo.
    b. Calcule las características de operación L, L_q, W y W_q para el número de empleados que eligió.

11. La Ozella Fish Company utiliza sus propios botes camaroneros para pescar camarón y después lo empaca para enviarlo a otras partes. Cuando estos botes llegan durante la temporada, hay que descargarlos tan rápido como sea posible para que puedan volver al mar. El gerente de producción de la Ozella Fish Company estima que el costo de que un bote camaronero permanezca detenido es $50 por hora (esto incluye los salarios al igual que el tiempo perdido de pesca). Los trabajadores que descargan los botes ganan $8 por hora ya sea que estén trabajando o no. Si el patrón de llegadas para los botes camaroneros es aleatorio y el tiempo de descarga también lo es, ¿cuál es el número de trabajadores que la Ozella debe utilizar para descargar los botes y que produzca el menor costo total? Los botes camaroneros llegan a una tasa promedio de uno por hora y cada trabajador puede descargar medio bote por hora.

12. En un estudio de un expendio local de venta de hamburguesas conocido como Sally Jo's,

los estudiantes de la North Avenue Trade School hicieron las siguientes observaciones: parece que los clientes llegan al azar; todos los clientes se colocan en una sola fila para hacer y recibir sus pedidos; debido a diferencias en el volumen y la complejidad en los pedidos; la duración del tiempo para atender a cada cliente es aleatoria.

Después, los estudiantes recopilaron datos sobre tiempos de llegada y de servicio. Se observaron las llegadas para periodos de una hora y se anotaron los números de llegadas durante cada periodo de 10 minutos durante la hora. Los resultados de este conteo son:

Intervalo	*Llegadas*
0–10 min	14
10–20 min	5
20–30 min	10
30–40 min	8
40–50 min	12
50–60 min	7

Para un muestreo aleatorio de las llegadas anteriores, los tiempos de servicio (en segundos) fueron:

25	20	45
25	13	52
35	25	25
45	25	38
42	55	45
15	70	20
28	30	55
32	58	65
10	85	50
13	10	30
45	15	30

Suponiendo que estos tiempos de llegadas y de servicio se ajustan de verdad a las distribuciones de probabilidad de Poisson y exponencial negativa:

a. Calcule la tasa de promedio de llegadas y la tasa de servicio.

b. Determine las siguientes características de operación: P_0, L, L_q, W y W_q

13. El padre Mulcahy utiliza en la actualidad dos confesionarios con filas separadas para atender las necesidades de sus feligreses. Se ha observado que las llegadas son aleatorias, a un ritmo promedio de 30 personas por hora y el tiempo de servicio tiende a ser aleatorio también, puesto que la cantidad de pecados por persona puede diferir en gran medida. Se ha determinado que el tiempo promedio que se permanece en el confesionario es de 3 minutos. Se ha obtenido también que las llegadas se distribuyen en forma equitativa entre las dos líneas. El padre Mulcahy está considerando cambiar a un sistema en el que se utilice una sola fila que alimente ambos confesionarios. El padre desea saber qué sistema (el actual o el propuesto), conducirá al tiempo promedio más breve en el sistema para sus feligreses.

14. La compañía arrendadora U-Drive-'em (problema 10) está considerando añadir un taller de lavado para incrementar su negocio. La nueva tasa de llegadas es de 8 automóviles por día, en tanto que la tasa de lavado para cada taller será de $2n$, en donde n = número de empleados en cada taller. La compañía ha determinado que el costo adicional de las nuevas instalaciones es $50 diarios.

a. Bajo estas nuevas condiciones, determínese si la compañía U-Drive-'em debe añadir la instalación adicional o no.

b. Calcule las características de operación para el plan que determine usted que tiene el menor costo.

15. Acaba de surgir una nueva oportunidad para la Ozella Fish Company (problema 11). Puede

rentar un muelle adyacente en $20 la hora para descargar los botes camaroneros durante la temporada fuerte de pesca. Determine si sería redituable que la Ozella Fish Company rente ese espacio adicional de muelle. Puede usted suponer que todos los demás valores siguen siendo los mismos que en el problema original.

16. El jefe de la oficina de admisión de una escuela de negocios bien conocida, maneja solicitudes de ingreso a la maestría de administración de empresas sobre la base de que el primero que llega es el primero que se atiende. Estas solicitudes llegan aleatoriamente a razón de 5 por día. La distribución de probabilidad en los tiempos de servicio es tal que la desviación estándar es 1/10 de día y la media es 1/9 de día. ¿Cuál es el tiempo promedio que una solicitud espera para ser procesada? En promedio, ¿cuántas solicitudes están en espera de ser procesadas en cualquier momento?

17. El First National Bank está planeando instalar una variedad especial de cajeros automáticos en la librería de una universidad local. Este cajero automático será especial porque permitirá sólo hacer retiros (necesidad común en la universidad). Puesto que el cajero sólo permitirá retiros, tendrá un tiempo determinístico de servicio de 60 segundos. Si las llegadas son aleatorias y a razón de 30 por hora, ¿cuál será el tiempo promedio que un estudiante pasará en la fila y haciendo su retiro? En promedio, ¿cuántos estudiantes estarán en espera de hacer retiros?

18. Un hospital local está planeando ofrecer un servicio a la población en general. Este servicio consistirá en dar información médica sobre diversos temas a las personas que marquen el número de información del hospital, que es público. El hospital pronostica que habrá aproximadamente 10 llamadas por hora y que serán de duración aleatoria. Una operadora contestará a las personas que llamen e intentará responder sus preguntas. La experiencia ha mostrado que la llamada promedio dura 5 minutos. El hospital desea reducir la probabilidad de que las personas que llamen encuentren ocupada la línea, a menos de 0.05 aumentando las líneas telefónicas. Habrá sólo una línea telefónica por operador. Utilice la Fórmula de la Llamada Perdida de Erlang para calcular el número de líneas telefónicas necesarias para alcanzar el nivel deseado de probabilidad del hospital.